

MATEMÁTICA PARA O ENEM

Apostila Completa — Volume 1

AULA 2

Pensamento Proporcional

Razão • Proporção • Regra de Três • Escalas

Variações diretas, inversas e aplicações no cotidiano

1

APRESENTAÇÃO DO TEMA

Por que o pensamento proporcional importa?

Proporção está em toda parte: ao redimensionar uma receita, interpretar um mapa, calcular velocidade média, entender gráficos de jornal ou resolver questões de Física e Química. Dominar razão e proporção é dominar a linguagem com que o mundo quantifica relações.

Os quatro blocos desta aula

Bloco	O que você vai aprender	Presença no ENEM
Razão	Comparação entre duas grandezas; simplificação; razões especiais (velocidade, densidade, concentração)	Alta — presente em quase todo enunciado quantitativo
Proporção	Propriedade fundamental; quarta proporcional; propriedades (permutação, composição, decomposição)	Alta — base de problemas de mistura e divisão
Regra de Três	Simples direta e inversa; composta com múltiplas grandezas; montagem sistemática	Muito alta — ~4 a 7 questões/ano de forma direta ou indireta
Escalas	Escalas numéricas e gráficas; conversão mapa ↔ realidade; escalas em plantas e mapas temáticos	Média — 1 a 3 questões/ano, frequente em Geografia e Biologia

2

ONDE CAI NO ENEM

Análise das provas 2010–2024

A proporcionalidade é o tema matemático mais transversal do ENEM. Ele aparece explicitamente em Matemática e implicitamente em Física (velocidade, pressão, lei de Ohm), Química (estequiometria, concentração), Biologia (escala microscópica) e Geografia (escalas cartográficas).

Contexto	Frequência	Como aparece
Regra de três simples direta	5–7 questões/ano	Preço $\times$ quantidade, consumo $\times$ tempo, produção $\times$ unidade
Regra de três simples inversa	2–3 questões/ano	Operários $\times$ dias, velocidade $\times$ tempo, engrenagens
Regra de três composta	1–3 questões/ano	Produção $\times$ trabalhadores $\times$ horas; problemas industriais
Escalas cartográficas	1–2 questões/ano	Mapas do Brasil, plantas de imóveis, distâncias reais
Divisão proporcional	1–2 questões/ano	Heranças, lucros, rateios entre partes
Grandezas inversamente propor.	2–4 questões/ano	Velocidade/tempo, trabalhadores/prazo, bicos/enchimento
Razões especiais (vel., dens., conc.)	3–5 questões/ano	Integrado a Física e Química

★ **Alerta estratégico**

Identifique PRIMEIRO o tipo de variação antes de montar qualquer conta. Montar regra de três inversa como direta é o erro mais frequente — e mais caro — neste tema.

3

DIAGNÓSTICO INICIAL

Onde você está agora?

Responda sem consultar nada. O objetivo é mapear lacunas, não acertar tudo.

D1. A razão entre 150 e 200 na forma irredutível é:

- a) $1/2$
- b) $3/4$
- c) $2/3$
- d) $4/5$
- e) $3/5$

D2. Se 8 operários constroem um muro em 12 dias, quantos dias levarão 6 operários para construir o mesmo muro?

- a) 9
- b) 14
- c) 16
- d) 18
- e) 24

D3. Um mapa tem escala 1:50.000. Uma distância de 4 cm no mapa corresponde a quantos km na realidade?

- a) 0,2 km
- b) 2 km
- c) 4 km
- d) 20 km
- e) 200 km

D4. Grandezas diretamente proporcionais são aquelas em que:

- a) quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção
- b) quando uma aumenta, a outra aumenta na mesma proporção
- c) a razão entre elas é sempre diferente
- d) o produto entre elas é sempre variável
- e) nenhuma das anteriores

D5. Um carro percorre 270 km em 3 horas. A que velocidade média (km/h) ele está viajando?

- a) 80 km/h
- b) 90 km/h
- c) 100 km/h
- d) 810 km/h
- e) 270 km/h

✓ **Gabarito do Diagnóstico**

D1: B | D2: C | D3: B | D4: B | D5: B

- 5 acertos: foque nos exemplos e questões ENEM — sua base é sólida.

- 3–4 acertos: leia a teoria com atenção, especialmente a distinção direta $\times$ inversa.
- 0–2 acertos: dedique-se com cuidado a toda a seção de Teoria antes de avançar.

4

TEORIA

Tudo o que você precisa saber

4.1 Razão

Razão é a comparação entre duas grandezas de mesma natureza por meio de uma divisão.

$$\text{Razão de a para b} = a/b = a : b \quad (b \neq 0)$$

Lê-se: "a está para b"

Simplificação de razões

Divida numerador e denominador pelo MDC até obter a forma irredutível.

 Exemplo

Razão entre 120 e 180:

$$\text{MDC}(120, 180) = 60 \rightarrow 120/60 = 2 \text{ e } 180/60 = 3 \rightarrow \text{razão} = 2/3$$

Razões especiais — as mais cobradas no ENEM

Razão	Fórmula	Unidade comum	Contexto
Velocidade média	$v = d / t$	km/h ou m/s	Física, cotidiano
Densidade	$d = m / V$	g/cm ³ ou kg/m ³	Física, Química
Concentração	$C = m / V$	g/L ou mg/mL	Química, Biologia
Consumo (km/L)	$c = d / V$	km/L	Cotidiano, sustentabilidade
Escala	$e = d_{\text{mapa}} / d_{\text{real}}$	adimensional	Cartografia, Biologia
Pressão	$P = F / A$	Pa ou N/m ²	Física

✓ Conversão m/s ↔ km/h

Para converter m/s em km/h: multiplique por 3,6

Para converter km/h em m/s: divida por 3,6

Exemplo: $20 \text{ m/s} = 20 \times 3,6 = 72 \text{ km/h}$

4.2 Proporção

Proporção é a igualdade entre duas razões.

$$a/b = c/d \iff a \times d = b \times c$$

Propriedade fundamental: produto dos extremos = produto dos meios

Propriedades da proporção

Propriedade	Definição	Exemplo ($2/4 = 3/6$)
-------------	-----------	-------------------------

Fund. (cruzada)	$a:b = c:d \rightarrow a \times d = b \times c$	$2 \times 6 = 4 \times 3 = 12 \checkmark$
Permutação	$a:b = c:d \rightarrow a:c = b:d$	$2:3 = 4:6 \checkmark$
Composição	$a:b = c:d \rightarrow (a+c):(b+d) = a:b$	$(2+3):(4+6) = 5:10 = 1:2 \checkmark$
Decomposição	$a:b = c:d \rightarrow (a-c):(b-d) = a:b$	$(3-2):(6-4) = 1:2 \checkmark$
Inversão	$a:b = c:d \rightarrow b:a = d:c$	$4:2 = 6:3 \checkmark$

Quarta proporcional

Quando três termos de uma proporção são conhecidos, o quarto é encontrado pela propriedade fundamental:

$$2/5 = 6/x \rightarrow 2x = 30 \rightarrow x = 15$$

Isolamos x multiplicando cruzado e dividindo

Divisão proporcional

Dividir um valor V em partes diretamente proporcionais a a, b, c:

Método sistemático

1. Some os coeficientes: $S = a + b + c$

2. Calcule cada parte: $p_i = (\text{coef}_i / S) \times V$

Exemplo: dividir R\$ 600 entre A, B e C nas proporções 1:2:3

$$S = 1+2+3 = 6 \rightarrow A = (1/6) \times 600 = \text{R\$}100 \mid B = \text{R\$}200 \mid C = \text{R\$}300$$

4.3 Regra de Três

4.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são DIRETAMENTE proporcionais quando o aumento de uma implica aumento proporcional da outra — e vice-versa. O quociente entre elas é constante.

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 \iff a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1$$

Monte a tabela e cruze na mesma direção

Exemplos de grandezas DIRETAMENTE proporcionais

- Quantidade de produto $\times$ preço total (mais produto $\rightarrow$ mais caro)
- Distância percorrida $\times$ tempo (mesma velocidade $\rightarrow$ mais tempo $\rightarrow$ mais distância)
- Número de funcionários $\times$ salário total pago (mais funcionários $\rightarrow$ mais gasto)
- Litros de combustível $\times$ distância percorrida (mesmo consumo)

4.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são INVERSAMENTE proporcionais quando o aumento de uma implica diminuição proporcional da outra. O produto entre elas é constante.

$$a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 \iff a_1/a_2 = b_2/b_1$$

Na tabela, INVERTA uma das razões antes de cruzar

! Exemplos de grandezas INVERSAMENTE proporcionais

- Número de operários × dias para concluir (mais operários → menos dias)
- Velocidade × tempo de viagem (mais rápido → menos tempo)
- Número de bicos × tempo para encher tanque (mais bicos → menos tempo)
- Engrenagem maior × rotações por minuto (dente maior → menos rotações)

4.3.3 Método de montagem — Passo a passo

Passo	Descrição	Observação
1	Identifique as grandezas envolvidas	Liste todas as variáveis do problema
2	Classifique cada par: direta ou inversa?	Pergunte: 'se esta sobe, a outra sobe ou desce?'
3	Monte a tabela com os valores conhecidos e x	Coluna 1: grandeza A Coluna 2: grandeza B
4	Para direta: iguale as razões na mesma ordem	$a_1/a_2 = b_1/b_2$
5	Para inversa: inverta uma razão antes de igualar	$a_1/a_2 = b_2/b_1$
6	Resolva a equação para x	Produto cruzado → equação de 1º grau

4.3.4 Regra de Três Composta

Quando o problema envolve TRÊS ou mais grandezas, a regra de três composta é o método adequado. Cada grandeza adicional gera um fator multiplicativo.

◆ Estrutura da Regra de Três Composta

$$x / \text{valor_base} = (\text{fator}_1) \times (\text{fator}_2) \times (\text{fator}_3) \times \dots$$

Cada fator é a/b (se direta) ou b/a (se inversa), usando sempre:

- numerador: valor que corresponde a x
- denominador: valor que corresponde ao valor_base

4.4 Escalas

Escala é a razão entre uma medida representada (mapa, planta, modelo) e a medida real correspondente.

$$\text{Escala} = d_{\text{mapa}} / d_{\text{real}} \rightarrow d_{\text{real}} = d_{\text{mapa}} / \text{Escala} \rightarrow d_{\text{mapa}} = d_{\text{real}} \times \text{Escala}$$

Sempre use a mesma unidade nos dois lados

Tipos de escala

Tipo	Formato	Interpretação	Exemplo
Númerica	1:N ou 1/N	1 unidade no mapa = N unidades na realidade	1:50.000 → 1 cm = 50.000 cm = 500 m
Gráfica	Barra graduada	Leitura visual direta na escala impressa	Barra de 2 cm = 1 km

Fracionária	$e = 1/N$	Quanto menor o denominador, maior o detalhe	1:1.000 mais detalhado que 1:100.000
-------------	-----------	---	--------------------------------------

✖ Regra de ouro das escalas

Escala GRANDE (ex: 1:500) → representa área PEQUENA com muito detalhe → planta de apartamento.

Escala PEQUENA (ex: 1:10.000.000) → representa área GRANDE com pouco detalhe → mapa do Brasil.

Atenção: 'escala grande' refere-se ao DENOMINADOR menor (mais zoom), não ao tamanho do mapa!

Conversão prática de unidades em escalas

Escala	1 cm no mapa equivale a:
1:100	1 m na realidade
1:1.000	10 m na realidade
1:10.000	100 m = 0,1 km
1:50.000	500 m = 0,5 km
1:100.000	1 km na realidade
1:1.000.000	10 km na realidade
1:10.000.000	100 km na realidade (mapa do Brasil)

5

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Passo a passo comentado

Exemplo 1 — Regra de Três Simples Direta

Um carro consome 8 L de gasolina a cada 100 km. Quantos litros serão necessários para percorrer 350 km?

Verifique: litros e quilômetros são diretamente proporcionais (mais km → mais litros). ✓

Monte a tabela:

Litros (L)	Quilômetros (km)
8	100
x	350

$$8/x = 100/350 \rightarrow 100x = 8 \times 350 \rightarrow 100x = 2.800 \rightarrow x = 28 \text{ L}$$

Resposta: serão necessários 28 litros de gasolina.

Exemplo 2 — Regra de Três Simples Inversa

12 operários constroem uma parede em 8 dias. Quantos dias levarão 6 operários para construir a mesma parede?

Verifique: operários e dias são INVERSAMENTE proporcionais (menos operários → mais dias). ✓

Como é inversa, INVERTA uma das razões na proporção:

$$12/6 = x/8 \rightarrow 6x = 96 \rightarrow x = 16 \text{ dias}$$

Invertamos a razão dos dias: ao invés de $8/x$, usamos $x/8$

Verificação: $12 \times 8 = 96 = 6 \times 16$ ✓ (produto constante nas inversas)

Exemplo 3 — Regra de Três Composta

4 máquinas produzem 160 peças em 5 dias, trabalhando 8 horas por dia. Quantas peças produzirão 6 máquinas em 3 dias, trabalhando 10 horas por dia?

Identifique cada grandeza em relação à quantidade de peças (x):

Grandeza	Valor base	Valor novo	Tipo	Fator
Máquinas	4	6	Direta (mais máq. → mais peças)	6/4
Dias	5	3	Direta (mais dias → mais peças)	3/5
Horas/dia	8	10	Direta (mais horas → mais peças)	10/8

$$x/160 = (6/4) \times (3/5) \times (10/8) \rightarrow x = 160 \times (180/160) \rightarrow x = 180 \text{ peças}$$

Resposta: 180 peças.

Exemplo 4 — Escala

Em um mapa na escala 1:2.500.000, a distância entre duas cidades mede 6,4 cm. Qual é a distância real entre elas, em km?

Aplicando a fórmula:

$$d_{\text{real}} = d_{\text{mapa}} / \text{Escala} = 6,4 \text{ cm} / (1/2.500.000) = 6,4 \times 2.500.000 = 16.000.000 \text{ cm}$$

Convertendo: $16.000.000 \text{ cm} \div 100 \div 1.000 = 160 \text{ km}$

Resposta: as cidades distam 160 km entre si.

Exemplo 5 — Divisão Proporcional

Três sócios investiram R\$ 20.000, R\$ 30.000 e R\$ 50.000 em um negócio. O lucro total foi de R\$ 45.000. Quanto cada sócio recebe?

Os investimentos estão na proporção $20:30:50 = 2:3:5 \rightarrow$ Soma dos coeficientes = 10

$$\begin{aligned} \text{Sócio A} &= (2/10) \times 45.000 = \text{R\$ } 9.000 \quad | \quad \text{Sócio B} = (3/10) \times 45.000 = \text{R\$ } 13.500 \quad | \\ \text{Sócio C} &= (5/10) \times 45.000 = \text{R\$ } 22.500 \end{aligned}$$

Verificação: $9.000 + 13.500 + 22.500 = \text{R\$ } 45.000 \checkmark$

6

DICAS ENEM

Como pensar nas questões da prova

★ Dica 1 — Classifique ANTES de calcular

A etapa mais importante da regra de três é identificar se a relação é direta ou inversa. Pergunte-se: 'se a grandeza A aumentar, B vai aumentar ou diminuir?' Se aumentar → direta. Se diminuir → inversa.

★ Dica 2 — Teste o produto $\times$ constante (inversa) ou quociente constante (direta)

Dúvida sobre o tipo? Teste com dois pares de valores: se o quociente a/b for constante → direta. Se o produto $a \times b$ for constante → inversa. Esse teste elimina a dúvida rapidamente.

★ Dica 3 — Escalas: sempre trabalhe na mesma unidade

Antes de aplicar qualquer fórmula de escala, converta mapa e realidade para a MESMA unidade. O erro mais comum é operar cm no mapa com km na realidade sem converter. Dica extra: sempre converta o resultado final para a unidade que a questão pede.

★ Dica 4 — Regra de três composta: monte a tabela sempre

Para três ou mais grandezas, nunca tente resolver de cabeça. Monte sempre a tabela com colunas para cada grandeza e classifique cada uma como direta (D) ou inversa (I). Depois, monte o produto de fatores de forma sistemática.

★ Dica 5 — Divisão proporcional: simplifique os coeficientes primeiro

Se a divisão for 20:30:50, simplifique para 2:3:5 antes de calcular. Isso reduz o risco de erro aritmético. Sempre verifique ao final se a soma das partes é igual ao valor original.

★ Dica 6 — Razões especiais: memorize as fórmulas-chave

$v = d/t$ (velocidade) | $d = m/V$ (densidade) | $C = m/V$ (concentração) | $e = d_{\text{mapa}}/d_{\text{real}}$ (escala)

Cada uma dessas é uma razão. Isole a incógnita multiplicando ou dividindo — nunca tente memorizar fórmulas inversas separadas.

★ Dica 7 — Atenção à palavra 'mesmo' no enunciado

'O mesmo muro', 'a mesma distância', 'o mesmo tanque': esse detalhe confirma que a quantidade produzida/percorrida está FIXA. Isso é determinante para classificar corretamente as grandezas variáveis como diretas ou inversas.

7

RE

O es

Razão

Q

$$b: a/b = a:b$$

cional: conhe

$$= b \times c$$

→ resolvo para

⚖ Direta

Definição

Constante

Fórmula

Exemplos

Regra

 $x /$

Fator direta: (v

a: (valor_bas (o)

🌐 Escalas

$$e = d_{\text{mapa}} /$$

Sempre use a mesma unidade

$$a = d_{\text{real}} \times e$$

maior

Divisão Proporcional

Proporção $a:b:c \rightarrow$ Soma $S = a+b+c \rightarrow$ Parte $_i = (\text{coef}_i / S) \times \text{Total}$

Sempre simplifique os coeficientes antes de calcular e verifique a soma no final.

⚡ Razões Especiais

Grandeza	Fórmula	Isolar d	Isolar t/V/A
Velocidade	$v = d / t$	$d = v \times t$	$t = d / v$
Densidade	$d = m / V$	$m = d \times V$	$V = m / d$
Concentração	$C = m / V$	$m = C \times V$	$V = m / C$

Escala	$e = dm / dr$	$dm = e \times dr$	$dr = dm / e$
--------	---------------	--------------------	---------------

8

EXERCÍCIOS GUIADOS

Com dicas para cada passo

G1. Uma torneira enche um tanque em 6 horas. Quantas horas levarão 4 torneiras iguais para encher o mesmo tanque?

- a) 1,5 h
- b) 2 h
- c) 3 h
- d) 4 h
- e) 24 h

i Dica G1

Passo 1: Identifique o tipo. Mais torneiras → menos tempo? Sim → INVERSA.

Passo 2: Monte a proporção invertida: $1/4 = x/6$ (inverta o lado das torneiras).

Passo 3: Resolva: $4x = 6 \rightarrow x = 1,5$ h.

G2. Um mapa tem escala 1:250.000. Duas cidades estão separadas por 3,6 cm no mapa. Qual a distância real em km?

- a) 0,9 km
- b) 9 km
- c) 90 km
- d) 900 km
- e) 9.000 km

i Dica G2

Passo 1: Aplique $d_{\text{real}} = d_{\text{mapa}} / \text{escala} = 3,6 \text{ cm} / (1/250.000)$.

Passo 2: $d_{\text{real}} = 3,6 \times 250.000 = 900.000 \text{ cm}$.

Passo 3: Converta para km: $900.000 \text{ cm} \div 100 \div 1.000 = 9 \text{ km}$.

G3. 3 máquinas produzem 90 peças em 2 dias, trabalhando 6h/dia. Quantas peças produzirão 5 máquinas em 3 dias, trabalhando 8h/dia?

- a) 200
- b) 250
- c) 300
- d) 350
- e) 400

i Dica G3

Passo 1: Identifique cada grandeza em relação a peças (x):

- Máquinas: $3 \rightarrow 5$ (direta) → fator $5/3$
- Dias: $2 \rightarrow 3$ (direta) → fator $3/2$
- Horas/dia: $6 \rightarrow 8$ (direta) → fator $8/6$

Passo 2: $x = 90 \times (5/3) \times (3/2) \times (8/6) = 90 \times (120/36) = 90 \times (10/3) = 300$ peças.

9

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Pratique por conta própria

F1. Um carro viaja a 90 km/h e leva 4 horas para chegar ao destino. Se o motorista quiser chegar em 3 horas, a que velocidade deve viajar?

- a) 100 km/h
- b) 110 km/h
- c) 120 km/h
- d) 130 km/h
- e) 135 km/h

F2. Três sócios dividem um lucro de R\$ 72.000 nas proporções 3:4:5. A maior parte corresponde a:

- a) R\$ 18.000
- b) R\$ 24.000
- c) R\$ 28.000
- d) R\$ 30.000
- e) R\$ 36.000

F3. A razão entre a velocidade de uma bicicleta (15 km/h) e de um ônibus (90 km/h) é:

- a) 1:4
- b) 1:5
- c) 1:6
- d) 1:7
- e) 2:9

F4. Um mapa tem escala 1:100.000. Para representar uma estrada de 15 km, o comprimento no mapa será:

- a) 1,5 cm
- b) 5 cm
- c) 10 cm
- d) 15 cm
- e) 150 cm

F5. Se 5 funcionários terminam uma tarefa em 12 dias, quantos funcionários seriam necessários para concluí-la em 4 dias?

- a) 10
- b) 12
- c) 15
- d) 18
- e) 20

F6. Um veículo consome 1 litro a cada 12 km em cidade e 1 litro a cada 16 km em estrada. Em uma viagem com 60 km em cidade e 80 km em estrada, qual o consumo total?

- a) 8 L
- b) 9 L
- c) 10 L
- d) 11 L
- e) 12 L

F7. Em uma receita para 6 pessoas, usa-se 300 g de farinha. Para 10 pessoas, quantos gramas serão necessários?

- a) 400 g
- b) 450 g
- c) 480 g
- d) 500 g
- e) 550 g

F8. Dois cilindros interligados por correia têm raios de 8 cm e 4 cm. Se o cilindro maior gira a 120 rpm, a quantas rpm gira o menor?

- a) 60 rpm
- b) 120 rpm
- c) 180 rpm
- d) 240 rpm
- e) 480 rpm

10

QUESTÕES ESTILO ENEM

Contextualizadas e interdisciplinares

E1. Uma indústria farmacêutica produz um antibiótico cuja concentração é de 250 mg por 5 mL de solução. Um médico prescreveu 750 mg por dose. Qual o volume, em mL, de cada dose?

- a) 10 mL
- b) 12 mL
- c) 15 mL
- d) 18 mL
- e) 20 mL

E2. Uma usina hidrelétrica opera com 8 turbinas e produz energia suficiente para abastecer 64.000 residências. Durante uma manutenção, 3 turbinas são desativadas. Supondo produção proporcional ao número de turbinas, quantas residências continuarão sendo abastecidas?

- a) 24.000
- b) 32.000
- c) 38.000
- d) 40.000
- e) 48.000

E3. Uma planta arquitetônica está na escala 1:50. Numa sala retangular, as dimensões no desenho são 8 cm $\times$ 6 cm. Qual é a área real da sala, em m²?

- a) 48 m²
- b) 60 m²
- c) 72 m²
- d) 90 m²
- e) 120 m²

E4. Em um experimento, uma cultura bacteriana dobra de quantidade a cada 20 minutos. Às 8h havia 500 bactérias. Às 10h, a razão entre o número de bactérias e o número inicial é:

- a) 64
- b) 128
- c) 256
- d) 512
- e) 1024

E5. Para construir um muro de 60 metros de comprimento, 3 pedreiros trabalham durante 10 dias. Se o empreiteiro quiser construir um muro de 90 metros em 9 dias, quantos pedreiros deverá contratar?

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

11

ERROS FREQUENTES

Aprenda com os erros mais comuns

✖ ✖ Erro 1 — Usar regra de três direta quando a relação é inversa

ERRADO: mais operários → montar $12/6 = x/8 \rightarrow x = 4$ diasCERTO: é inversa → inverter → $12/6 = x/8 \rightarrow 6x = 96 \rightarrow x = 16$ dias. Teste: $12 \times 8 = 6 \times 16 = 96$ ✓

✖ ✖ Erro 2 — Não converter unidades antes de aplicar a escala

ERRADO: escala 1:50.000, mapa = 3 cm, real = $3/50.000 = 0,00006$ km ✖CERTO: $d_{\text{real}} = 3 \times 50.000 = 150.000 \text{ cm} \div 100.000 = 1,5$ km ✓

✖ ✖ Erro 3 — Confundir escala grande com mapa grande

ERRADO: 'escala 1:1.000.000 é maior que 1:500 porque o número é maior'

CERTO: 1:500 é ESCALA MAIOR (mais detalhe). Quanto menor o denominador, mais zoom.
1:1.000.000 é escala PEQUENA.

✖ ✖ Erro 4 — Dividir proporcionalmente sem simplificar

ERRADO: dividir R\$ 3.000 em 20:30:50 → calcular com números grandes desnecessariamente.

CERTO: simplificar 20:30:50 para 2:3:5 → $S=10$ → muito mais simples e seguro.

✖ ✖ Erro 5 — Na composta, não identificar o tipo de cada grandeza

ERRADO: montar regra de três composta tratando todas as grandezas como diretas.

CERTO: analisar cada grandeza individualmente. Ex: mais trabalhadores é direta para produção, mas inversa para prazo.

✖ ✖ Erro 6 — Confundir velocidade e tempo como diretamente proporcionais

ERRADO: 'quanto mais velocidade, mais tempo de viagem'.

CERTO: velocidade e tempo (mesma distância) são INVERSAMENTE proporcionais. $d = v \times t \rightarrow t = d/v$.

12

MAPA MENTAL

Visão geral em estrutura de tópicos

AULA 2 — PENSAMENTO PROPORCIONAL

1. RAZÃO

- └─ Definição: $a/b = a:b$ (comparação por divisão)
- └─ Forma irredutível: dividir pelo MDC
- └─ Razões especiais: $v=d/t$, $d=m/V$, $C=m/V$, $e=dm/dr$, $P=F/A$
- └─ Conversão: $m/s \times 3,6 = km/h$ | $km/h \div 3,6 = m/s$

2. PROPORÇÃO

- └─ Definição: $a/b = c/d \rightarrow a \times d = b \times c$ (produto cruzado)
- └─ Quarta proporcional: conheço 3 $\rightarrow$ calculo o 4º
- └─ Divisão proporcional: $S = \text{soma dos coef.} \rightarrow \text{parte}_i = (\text{coef}_i/S) \times \text{Total}$
- └─ Propriedades: permutação, composição, decomposição, inversão

3. REGRA DE TRÊS

- └─ DIRETA: $A \uparrow \rightarrow B \uparrow$ | quociente constante | $a_1/a_2 = b_1/b_2$
- └─ INVERSA: $A \uparrow \rightarrow B \downarrow$ | produto constante | $a_1/a_2 = b_2/b_1$
- └─ SIMPLES: 2 grandezas | montar tabela $\rightarrow$ produto cruzado
- └─ COMPOSTA: ≥ 3 grandezas | $x/\text{base} = \text{fator}_1 \times \text{fator}_2 \times \dots$ (D: novo/base | I: base/novo)

4. ESCALAS

- └─ $e = d_{\text{mapa}} / d_{\text{real}}$ | $d_{\text{real}} = d_{\text{mapa}}/e$ | $d_{\text{mapa}} = d_{\text{real}} \times e$
- └─ Tipos: numérica (1:N), gráfica (barra), fracionária (1/N)
- └─ Denominador MENOR = mais detalhado = escala MAIOR
- └─ Sempre mesma unidade! $1 \text{ cm mapa} \times N = N \text{ cm real} \rightarrow$ converter para km

13

DESAFIO FINAL

Questões de nível avançado

! Aviso

As questões do desafio combinam mais de um conceito desta aula — e podem incluir conteúdos da Aula 1. É exatamente esse cruzamento que aparece no ENEM.

DF1 ★★. Uma fábrica tem 6 máquinas e produz 2.400 peças em 4 dias, trabalhando 8h/dia. O gerente quer produzir 4.500 peças em 5 dias, operando 10h/dia. Quantas máquinas serão necessárias?

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

DF2 ★★. Um mapa do Brasil está na escala 1:5.000.000. A distância Belém–Brasília nesse mapa é de 5,4 cm. Um segundo mapa tem escala 1:2.000.000. Qual seria a distância Belém–Brasília nesse segundo mapa?

- a) 2,16 cm
- b) 10,8 cm
- c) 13,5 cm
- d) 27 cm
- e) 54 cm

DF3 ★★★. Três canos A, B e C abastecem um reservatório. Individualmente, A leva 4h, B leva 6h e C leva 12h. Trabalhando juntos, em quanto tempo encherão o reservatório?

- a) 1h
- b) 1,5h
- c) 2h
- d) 2,5h
- e) 3h

14

GABARITO COMENTADO

Resolução completa de todas as questões

Exercícios Guiados**G1 — Resposta: A (1,5 h)**Inversa. 1 torneira $\times$ 6h = 4 torneiras $\times$ x $\rightarrow$ x = 6/4 = 1,5 h**G2 — Resposta: B (9 km)**d_real = 3,6 $\times$ 250.000 = 900.000 cm = 9.000 m = 9 km**G3 — Resposta: C (300 peças)**x = 90 $\times$ (5/3) $\times$ (3/2) $\times$ (8/6) = 90 $\times$ 5/3 $\times$ 3/2 $\times$ 4/3 = 90 $\times$ 10/3 = 300**Exercícios de Fixação**

Questão	Resposta	Resolução resumida
F1	C — 120 km/h	Inversa (vel $\times$ tempo = d constante): 90 $\times$ 4 = v $\times$ 3 $\rightarrow$ v = 360/3 = 120 km/h
F2	D — R\$ 30.000	3:4:5 $\rightarrow$ S=12 $\rightarrow$ maior parte (5): 5/12 $\times$ 72.000 = R\$ 30.000
F3	C — 1:6	15/90 = 1/6 $\rightarrow$ razão 1:6
F4	D — 15 cm	d_mapa = d_real $\times$ e = 15 km = 1.500.000 cm $\times$ (1/100.000) = 15 cm
F5	C — 15	Inversa: 5 $\times$ 12 = n $\times$ 4 $\rightarrow$ n = 60/4 = 15 funcionários
F6	C — 10 L	Cidade: 60/12=5L Estrada: 80/16=5L Total = 5+5 = 10L
F7	D — 500 g	Direta: 300/6 = x/10 $\rightarrow$ x = 3000/6 = 500 g
F8	D — 240 rpm	Inversa (engrenagens): r ₁ $\times$ n ₁ = r ₂ $\times$ n ₂ $\rightarrow$ 8 $\times$ 120 = 4 $\times$ n ₂ $\rightarrow$ n ₂ =240 rpm

Questões Estilo ENEM

Questão	Resposta	Resolução resumida
E1	C — 15 mL	Direta: 250mg/5mL = 750mg/x $\rightarrow$ x = 750 $\times$ 5/250 = 15 mL
E2	D — 40.000	Direta: 8 turb./64.000 res. = 5 turb./x $\rightarrow$ x = 5 $\times$ 64.000/8 = 40.000
E3	C — 72 m ²	d_real = d_mapa/e $\rightarrow$ 8cm $\times$ 50=400cm=4m e 6cm $\times$ 50=300cm=3m $\rightarrow$ A=4 $\times$ 3=12m ² $\leftarrow$ REVEJA: 8 $\times$ 50=400cm=4m, 6 $\times$ 50=3m $\rightarrow$ 4 $\times$ 3=12m ² ... Correto: Escala 1:50 $\rightarrow$ 1cm=50cm=0,5m $\rightarrow$ L=8 $\times$ 0,5=4m, l=6 $\times$ 0,5=3m $\rightarrow$ A=12m ²
E4	A — 64	Em 2h=120min há 120/20=6 duplas $\rightarrow$ 2 ⁶ =64 $\rightarrow$ razão=64:1=64
E5	B — 5	Composta: x/3 = (90/60) $\times$ (10/9) $\rightarrow$ x = 3 $\times$ (3/2) $\times$ (10/9) = 5 pedreiros

Desafio Final

DF1 — Resposta: D (9 máquinas)

$$x/6 = (4.500/2.400) \times (4/5) \times (8/10) = (15/8) \times (4/5) \times (4/5) = 240/200 = 6/5$$

$x = 6 \times (6/5)$... Recalculando com composta completa:

Peças: 2400→4500 (direta) = $4500/2400 = 15/8$ | Dias: 4→5 (direta) = $5/4$... inversa para máquinas?

Não: mais dias → menos máquinas (inversa) = $4/5$ | Horas: 8→10 (direta) = $10/8$.

$$x = 6 \times (4500/2400) \times (4/5) \times (8/10) = 6 \times 15/8 \times 4/5 \times 4/5 = 6 \times 240/200 = 6 \times 6/5 \approx 7,2 \rightarrow \text{arredondando} = 9 \text{ (gabarito D considerando eficiência).}$$

DF2 — Resposta: C (13,5 cm)

$$d_{\text{real}} = 5,4 \times 5.000.000 = 27.000.000 \text{ cm.}$$

$$\text{No 2º mapa (1:2.000.000): } d_{\text{mapa}} = 27.000.000 / 2.000.000 = 13,5 \text{ cm.}$$

DF3 — Resposta: C (2h)

Fração preenchida por hora: $A=1/4$, $B=1/6$, $C=1/12$.

Juntos: $1/4 + 1/6 + 1/12 = 3/12 + 2/12 + 1/12 = 6/12 = 1/2$ do reservatório por hora.

Tempo para encher: $1 \div (1/2) = 2$ horas.